Concours National d'admission 1986

MATHÉMATIQUES I
Algèbre et analyse

OPTION GÉNÉRALE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet sera distribuée une feuille de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'épreuve est constituée d'un exercice noté sur 8 points et d'un problème noté sur 12 points.

EXERCICE *(sur 8 points)*

I. On note a un réel différent de 1 et on considère l'ensemble S des suites réelles $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad w_{n+2}=(2-a)\,w_{n+1}+(a-1)\,w_n$$

On rappelle que S est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles.

1° Déterminer suivant les valeurs de a une base de S.

2° Soit w un élément de S. Pour n entier naturel exprimer, suivant les valeurs de a, w_n en fonction de w_0 et w_1. Préciser la réponse si $w_0=0$ et $w_1=1$.

II. A tout couple (a, b) de réels différents de 1, on associe la matrice : $\mathrm{M}(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 1-b\end{pmatrix}$

et on désigne par E l'ensemble de ces matrices.

1° Démontrer que E, muni de la multiplication des matrices, est un groupe commutatif.

2° Résoudre dans E les équations suivantes :

a. $[\mathrm{M}(a,b)]^2=\mathrm{M}(a,b)$

b. $[\mathrm{M}(a,b)]^2=\mathrm{I}$ où $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

III. a étant un réel différent de 0 et 1, on note : $\mathrm{M}=\mathrm{M}(a,a)$

1° Démontrer que M^2 est combinaison linéaire de M et de I.

2° Établir l'existence de deux suites réelles $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\beta=(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{M}^n=\alpha_n\mathrm{M}+\beta_n\mathrm{I}$$

α et β vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}\alpha_{n+1}=x\alpha_n+y\beta_n\\ \beta_{n+1}=x'\alpha_n+y'\beta_n\end{cases}$

x, y, x', y' étant des réels que l'on déterminera.

3° Vérifier que α appartient à S. En déduire l'expression de α_n puis celle de β_n en fonction de n.

4° Expliciter M^n.

IV. Soit $\mathrm{A}=\mathrm{M}(2,2)$.

On désigne par F l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de A et I.

1° Démontrer que (F, +, ×) (les symboles désignent les opérations usuelles dont on munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3) est un anneau commutatif.

2° Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $(F, +, \cdot)$?

3° L'anneau $(F, +, \times)$ est-il intègre?

4° Quels sont les éléments de F admettant un symétrique pour la multiplication des matrices dans F?

PROBLÈME *(12 points)*

Pour tout n entier naturel, on considère la fonction :

$$g_n :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x\left(\ln \frac{1}{x}\right)^n$$

I. 1° *a.* Montrer que g_n admet un prolongement par continuité noté f_n sur $[0, 1]$.

b. Étudier la dérivabilité de f_n sur $[0, 1]$ et dresser le tableau des variations de f_n.

c. Justifier que f_n est deux fois dérivable sur $]0, 1[$ et que pour tout entier naturel n non nul et tout x de $]0, 1[$:

$$xf_n''(x) + nf_{n-1}'(x) = 0$$

d. On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ noté $\mathcal{R}$ (unité : 10 cm). Déduire de ce qui précède l'étude de la concavité de $\mathcal{C}_n$.

2° *a.* Justifier l'existence de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

b. Établir que pour tout entier naturel n non nul : $\quad I_n = \frac{n}{2} I_{n-1}$

En déduire I_n en fonction de n.

II. 1° *a.* Pour n entier naturel non nul, on note M_n le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse e^{-n}. Montrer que les points M_n appartiennent à une courbe Γ dont on donnera une équation $y = \gamma(x)$, $x \in]0, 1[$.

b. On considère les fonctions :

$$\varphi :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \longmapsto -\ln x \qquad \text{et} \qquad h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^x e^{-x}$$

Vérifier que $\gamma = h \circ \varphi$.

Étudier la dérivabilité de h; en déduire celle de γ, l'expression de γ' et les variations de γ.

Préciser les limites de γ aux bornes de son ensemble de définition; étudier la limite en 1 de γ'; interpréter graphiquement ces résultats.

2° Construire Γ, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ dans le repère $\mathcal{R}$ (on placera soigneusement les points d'inflexion de $\mathcal{C}_2$ et de $\mathcal{C}_3$).

III. 1° Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f_2^{(k)}$ la dérivée k-ième de f_2.

Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f_2^{(k)}(x) = \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{2-k}}{x^{k-1}} P_k\left(\ln \frac{1}{x}\right)$$

P_k étant un polynôme dont on précisera le degré.

Expliciter P_1, P_2 et P_3.

2. *a.* Prouver à partir de I. 1° *c.* que pour tout x de $]0, 1[$:

$$xf_2''(x) + x^2 f_2^{(3)}(x) = 2 \qquad (E)$$

b. En dérivant $(n-2)$ fois l'égalité (E) pour n entier supérieur ou égal à 3, établir la relation :

$$P_{n+1} + (2n-3)XP_n + (n-2)^2 X^2 P_{n-1} = 0$$